1.10. Les formes fonctionnelles des modèles de régression linéaires

a) Modèle linéaire
b) Modèle log - linéaire
c) Modèle semi - logarithmique
d) Modèle réciproque
e) Modèle log - inverse.

a) Le modèle linéaire

$$\boxed{Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t}$$

Modèle linéaire dans les paramètres et les variables.

Interprétation du paramètre β_2 ?

$$\beta_2 = \frac{\text{Unités de la variable dpdte } Y}{\text{Unités de la variable expl. } X}$$

$$\boxed{\beta_2 = \frac{\text{Changement absolu de la var. dpdte } Y}{\text{Changement absolu de la var. expl. } X}}$$

Exemple :

$$\widehat{Ip}_t = -1026,498 + 0,3016\ PIB_t \quad , \quad R^2 = 0,8772$$
$$s.e = (257,5874) \qquad (0,0399)$$

Ip (= invest. privés) et PIB en milliards d'€

Lorsque PIB augmente d'1 unité (1 milliard d'€), en moyenne dép. privées d'invest. ↑ de 301,6 millions d'€.

Rappels :

a) Changement absolu : $(X_t - X_{t-1})$

b) Changement relatif ou proportionnel :

$$\left(\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}\right) = \left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) - 1$$

c) Changement (relatif) en pourcentage ou taux de croissance :

$$\left(\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}\right) * 100$$

d) Elasticité de Y par rapport à X : mesure la variation en % de la variable Y suite à une (petite) variation en % de la variable X.

$$\eta_{Y/X} = \frac{\left(\frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}}\right) * \frac{100}{T}}{\left(\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}\right) * \frac{100}{T}} = \frac{\frac{\Delta Y}{Y}}{\frac{\Delta X}{X}} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \frac{X}{Y}$$

$$\left(= \frac{dY}{dX} \cdot \frac{X}{Y}\right)$$

b) Le modèle log-linéaire (log-log, en double log)

$$Y_t = \beta_1 \cdot X_t^{\beta_2} \cdot e^{u_t} \qquad (e = 2,718)$$

$$\Rightarrow \quad \ln Y_t = \ln \beta_1 + \beta_2 \ln X_t + u_t$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ln Y_t = \alpha + \beta_2 \ln X_t + u_t}$$

où $\alpha = \ln \beta_1$

En prenant log des données initiales, on peut utiliser MCO pour estimer :

$$Y_t^* = \alpha + \beta_2 X_t^* + u_t$$

où $\begin{cases} Y_t^* = \ln Y_t \\ X_t^* = \ln X_t \end{cases}$

Interprétation de β_2 ?

β_2 mesure l'élasticité de Y par rapport à X

β_2 mesure variation en % de Y suite à une variation de 1% de X.

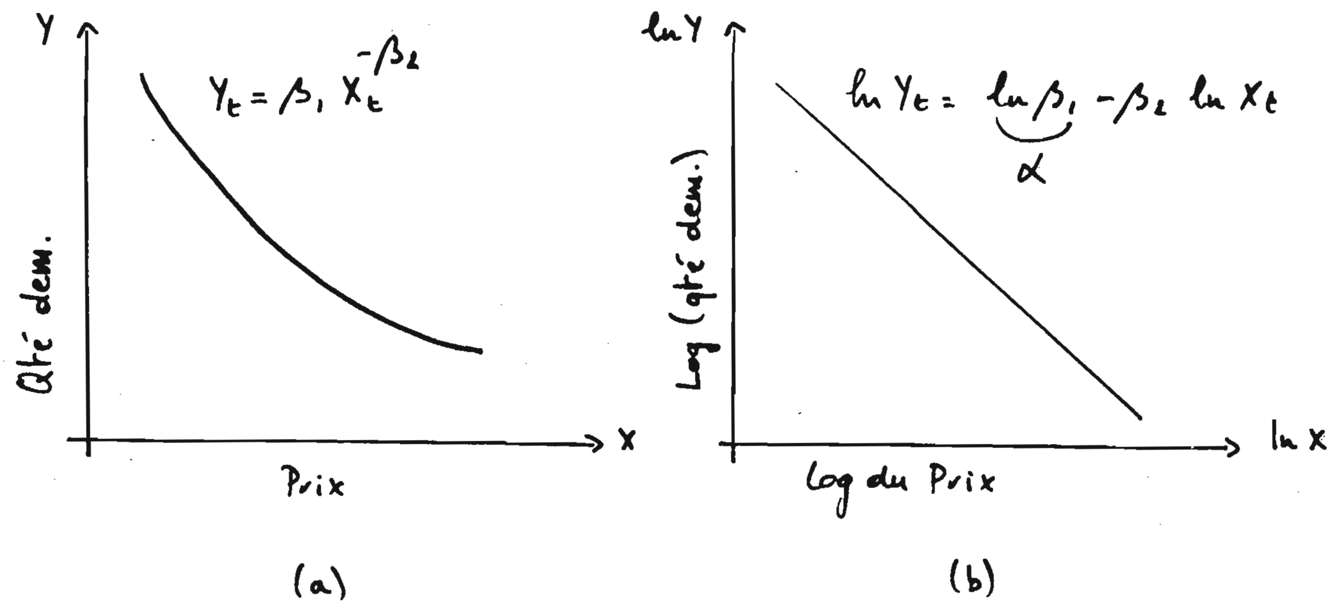
$$\boxed{\beta_2 = \frac{\text{Variation relative de } Y}{\text{Variation relative de } X}}$$

Pq ?

$$\beta_2 = \frac{d(Y^*)}{d(X^*)} = \frac{d(\ln Y)}{d(\ln X)} = \frac{1/Y \cdot dY}{1/X \cdot dX} = \frac{dY}{dX} \cdot \frac{X}{Y}$$

$\equiv$ élasticité de Y par rapport à X

Graphiquement



Modèle à élasticité constante : élasticité de Y // X est indépendante de la valeur de X.

Les estimateurs MCO $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}_2$ sont non biaisés de α et β_2 mais $\hat{\beta}_1 = \text{antilog}(\hat{\alpha})$ est un estimateur biaisé de β_1.

Exemple : élasticité lel dép. totales de cons des ménages (proxy du revenu) et dépenses en biens durables ?

Rem : dép. tot. de cons. = dép. en biens durables + dép. en biens non durables + dép. de services.

$$\widehat{\ln Y_t} = -9,6971 + 1,0956 \ln X_t \quad , \quad R^2 = 0,9849$$

$$\text{s.e.} = (0,4341) \quad (0,0514)$$

$$t = (-22,3370) \quad (37,0962)$$

Règle : RH₀ ($H_0 : \beta_2 = 0$) si $|t| > 2$

où Y_t = montant des dép. en biens durables au temps t

X_t = montant des dép. tot. de cons. au temps t (milliards d'€)

c) Le modèle semi-logarithmique (log-lin, lin-log)

Taux de croissance des dépenses des ménages en matière de services ?

Soit Y_0 et Y_t, les dép. en matière de services au tmps 0 et t.

$$\boxed{Y_t = Y_0 (1+r)^t}$$

où r = taux de croiss. par unité de tmps.

$$\ln Y_t = \ln Y_0 + t \ln(1+r)$$

Soit $\beta_1 = \ln Y_0$, $\beta_2 = \ln(1+r)$

$$\Rightarrow \ln Y_t = \beta_1 + \beta_2 . t$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + u_t} \equiv \text{modèle log-lin}$$

Interprétation de β_2 ?

$$\boxed{\beta_2 = \frac{\text{Variation relative de } Y}{\text{Variation absolue de } X \text{ (càd. } t)}}$$

Pq ?

$$\beta_2 = \frac{d(\ln Y)}{dX} = \frac{1/Y \cdot dY}{dX} = \frac{1}{Y} \cdot \frac{dY}{dX}$$

Pour petites variations de Y et X :

$$\frac{1}{Y} \cdot \frac{dY}{dX} \simeq \frac{(Y_t - Y_{t-1}) / Y_{t-1}}{X_t - X_{t-1}}$$

- $(\beta_2 . 100)$ mesure la variation en % (càd. le tx de croissance) de Y suite à une variation absolue de X
$\equiv$ semi - élasticité de Y par rapport à X.

- $\beta_2 . \bar{X} = \left(\frac{dY}{dX} \cdot \frac{1}{Y}\right) . \bar{X} \equiv$ élasticité de Y par rapport à X.

où $\bar{X}$ = valeur moyenne de X.

- <u>Exemple</u>

Données trimestrielles |el 1993 et 1998, estimation par MCO.

$$\widehat{\ln Y_t} = 7,7890 + 0,00743 \ t$$
$$\text{s.e.} = (0,0023) \qquad (0,00017)$$
$$t = (3387,619) \qquad (44,2826)$$

$R^2 = 0,9894$

où $\begin{cases} Y_t = \text{montant des dépenses des ménages en matière de services au tmps } t \ (1993:1, 1998:4), \text{ milliards d'€} \\ t = \text{trend linéaire } (t = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$

Taux de croissance annuel = 2,97 % ($4 \times 0,743$ %)
Exp (7,7890) = 2413,9 $\equiv$ valeur des dépenses de services en $t = 0$, càd. au dernier trimestre de 1992 (Y_0)

Alternative : modèle linéaire avec tendance

$$\boxed{Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + u_t}$$

où t = tendance $(= 1, 2, 3, \ldots)$

$$\hat{Y}_t = 2405,848 + 19,6920 \cdot t$$
$$t = (322,9855) \qquad (36,2479)$$

$R^2 = 0,9843$

où $\begin{cases} Y_t = \text{dép. en matière de services en } t \text{ (milliards d'€)} \\ t = \text{tendance} \end{cases}$

Modèle lin-log :

$$\boxed{Y_t = \beta_1 + \beta_2 \ln X_t + u_t} \equiv \text{modèle lin-log}$$

$$\boxed{\beta_2 = \frac{\text{Variation absolue de } Y}{\text{Variation relative de } X}}$$

Pq ?

$$\beta_2 = \frac{dY}{d\ln X} \Rightarrow \beta_2 = \frac{dY}{\left(\frac{dX}{X}\right)} = \frac{dY}{dX} \cdot X$$

Pour petites variations de Y et X :

$$\frac{dY}{dX} \cdot X \simeq \frac{\Delta Y}{\left(\frac{\Delta X}{X}\right)} \Rightarrow \Delta Y = \beta_2 \cdot \left(\frac{\Delta X}{X}\right)$$

Interprétation ?

$$\Delta Y = \beta_2 \, (\Delta X / X)$$

Cette expression signifie que la variation absolue de la variable Y (= ΔY) est égale au produit de la pente et de la variation relative de X.

Si $\left(\frac{\Delta X}{X}\right)$ change de 0,01 unité (ou X de 1%), le changement absolu de Y est de $(0{,}01 * \beta_2)$.

Si on divise β_2 par 100 $(= \beta_2 / 100)$, on obtient la variation absolue de la variable Y suite à une variation de 1% de la variable X.

Pq ?

$$\frac{\beta_2}{100} = \frac{\Delta Y}{\left(\frac{\Delta X}{X}\right) * 100} = \frac{(Y_t - Y_{t-1})}{\left(\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}\right) * 100}$$

$$\equiv \frac{\text{Variation absolue de } Y}{\text{Variation relative en \% de } X}$$

$\Rightarrow$ si X varie de 1%, Y change de $\frac{\beta_2}{100}$ unités.

Exemple

$\beta_2 = 500$

Si $\frac{\Delta X}{X}$ change de 0,01 (ou X change de 1%), alors

$\Delta Y = 0{,}01 * 500 = 5$

! Dans un modèle lin – log, il faut diviser le coeff. de pente par 100 pour obtenir l'impact absolu sur Y d'une variation de X de 1%.

$$\hat{Y}_t = -1283{,}912 + 257{,}27 \ln X_t$$
$$t = (-4{,}3848) \qquad (5{,}6625)$$

$R^2 = 0{,}3769$

où $\begin{cases} Y_t = \text{dép. d'alim. des ménages en € en } t \\ X_t = \text{dép. totales des ménages en € en } t \end{cases}$

Si dépenses totales des ménages ↑ de 1%, les dépenses d'aliment. ↑ (en moyenne) de 2,57 €.

Elasticité de Y par rapport à X ?

$$\beta_2 = \frac{dY}{dX} \cdot X \Rightarrow \beta_2 \cdot \frac{1}{\bar{Y}} = \frac{dY}{dX} \cdot \frac{X}{\bar{Y}}$$

$\equiv$ élast. de Y par rapport à X

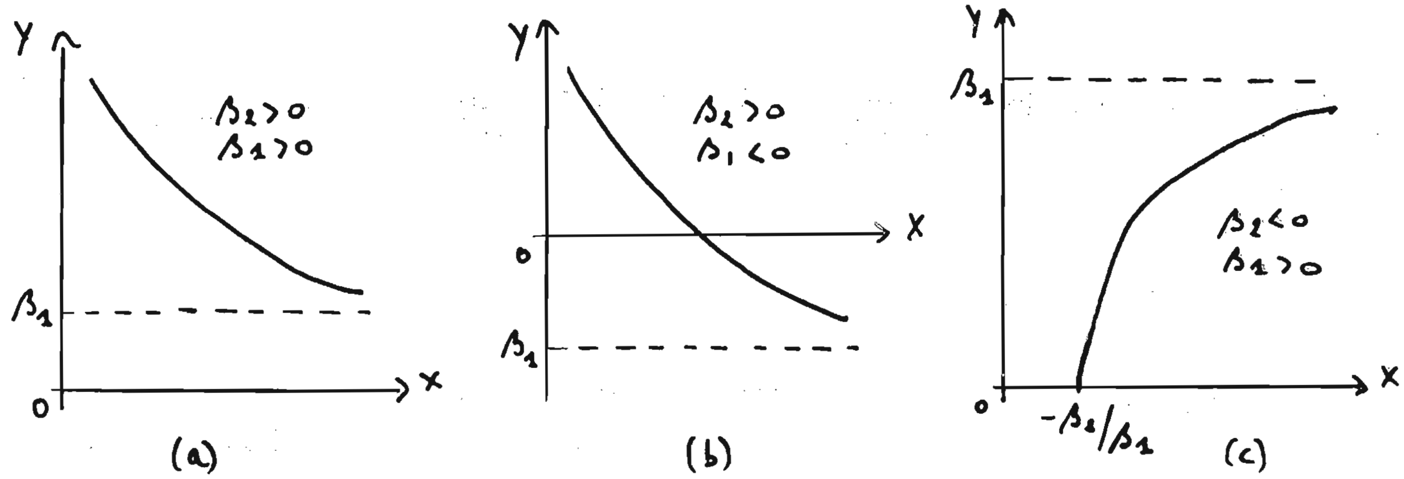
où $\bar{Y}$ = valeur moyenne de Y.

d) Modèle réciproque

$$\boxed{Y_t = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1}{X_t}\right) + u_t}$$

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{\beta_2}{X^2} \Rightarrow \begin{cases} \text{si } \beta_2 > 0 : \text{ pente tjs négative} \\ \text{si } \beta_2 < 0 : \text{ pente tjs positive} \end{cases}$$

Lorsque $X \to \infty$, $\frac{1}{X} \to 0$: β_1 est la limite de Y lorsque $X \to \infty$.



- (a) et (b) : Représentation de la courbe de Phillips (arbitrage de court terme (e) inflation et chômage). Estimation : régresser variation en % des salaires (Y) sur (1 / tx de chômage (= X)).
- (b) : Point d'intersection (e) courbe de Phillips et axe horizontal ≡ taux de chômage non inflationniste, naturel ou d'équilibre (NAIRU : non accelerating inflation rate of unemployment).
- (c) : Représentation des fonctions de dépense. Exemple : dépenses de cons. = fct° concave par rapport au revenu.

Elasticité de Y par rapport à X ?

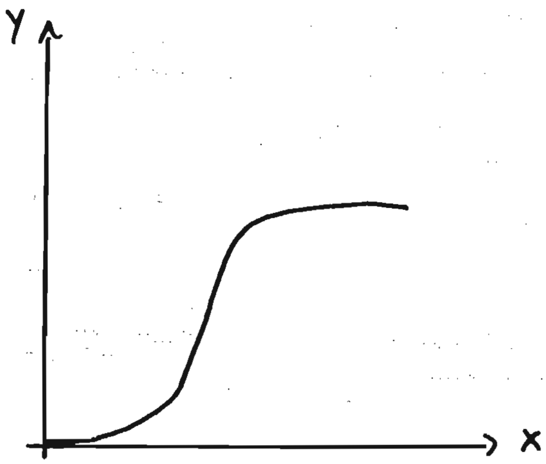
$$-\frac{\beta_2}{(\bar{X}.\bar{Y})} \quad \text{où} \begin{cases} \bar{X} = \text{valeur moyenne de } X \\ \bar{Y} = \text{valeur moyenne de } Y \end{cases}$$

Pq ?

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{\beta_2}{X^2} \Rightarrow \beta_2 = -X^2\left(\frac{dY}{dX}\right)$$

$$\frac{-\beta_2}{(\bar{X}\bar{Y})} = -\left[-X^2\left(\frac{dY}{dX}\right) / (\bar{X}\bar{Y})\right] = \frac{dY}{dX} \cdot \frac{\bar{X}}{\bar{Y}}$$

e) Le modèle log - inverse (log réciproque)



$$\boxed{\ln Y_t = \beta_1 - \beta_2\left(\frac{1}{X_t}\right) + u_t}$$

$$\frac{d(\ln Y)}{dX} = -\beta_2\left(-\frac{1}{X^2}\right) = \beta_2\left(\frac{1}{X^2}\right) \qquad (1)$$

$$\frac{d(\ln Y)}{dX} = \frac{1}{Y} \cdot \frac{dY}{dX} \qquad (2)$$

Par (1) et (2) :

$$\frac{dY}{dX} = \beta_2 \left(\frac{Y}{X^2} \right) \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = \frac{dY}{dX} \cdot \frac{X^2}{Y}$$

Elasticité de Y par rapport à X ?

$\frac{\beta_2}{\bar{X}}$ où $\bar{X}$ = valeur moyenne de X.

$$\simeq \frac{\Delta Y / Y}{\Delta X / X}$$

Pq ?

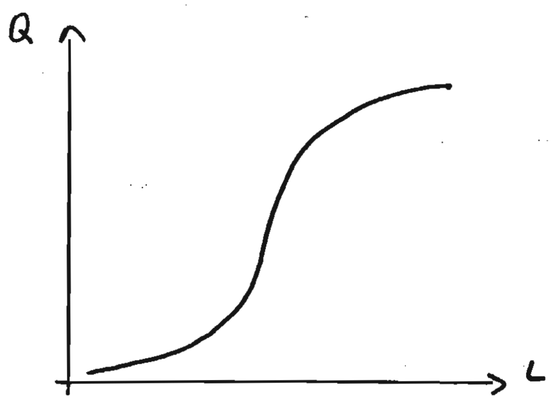
$$\beta_2 = \frac{X^2}{Y} \cdot \frac{dY}{dX} \Rightarrow \frac{\beta_2}{\bar{X}} = \frac{X}{Y} \cdot \frac{dY}{dX}$$

Exemple : Fonction de production à court terme.

K = cst

L varie

Q = F (K, L)



$F'_L > 0$

F''_L d'abord > 0
ensuite < 0

f) Le choix de la forme fonctionnelle

i) La théorie
ii) Calculer l'élasticité

Résumé :

Modèle	Equation	Pente $\left(\frac{dY}{dX}\right)$	Elast. $\left(\frac{dY}{dX} \cdot \frac{X}{Y}\right)$
Linéaire	$Y = \beta_1 + \beta_2 X$	β_2	$\beta_2 \, (X/Y)^*$
Log - linéaire	$\ln Y = \beta_1 + \beta_2 \ln X$	$\beta_2 (Y/X)$	β_2
Log - lin	$\ln Y = \beta_1 + \beta_2 X$	$\beta_2 Y$	$\beta_2 X^*$
Lin - log	$Y = \beta_1 + \beta_2 \ln X$	$\beta_2 (1/X)$	$\beta_2 (1/Y)^*$
Réciproque	$Y = \beta_1 + \beta_2 (1/X)$	$-\beta_2 (1/X^2)$	$-\beta_2 (1/XY)^*$
Log réciproque	$\ln Y = \beta_1 - \beta_2 (1/X)$	$\beta_2 (Y/X^2)$	$\beta_2 (1/X)^*$

* : Valeur de l'élasticité est variable, dépend de X et/ou de Y, en pratique calculée pour $\bar{X}, \bar{Y}$.

iii) Si plusieurs modèles adéquats pour tester une théorie, comparer les R^2 (! Ne pas surestimer imp. du R^2)

! Il faut que la variable dpdte soit la m̂.

Exemple : Ne pas comparer R^2 d'un modèle linéaire et d'un modèle log-lin.

En revanche, on peut comparer R^2 de :

$Y = \alpha + \beta X + u$ (modèle linéaire)

$Y = \alpha + \beta \ln X + u$ (modèle lin - log)