3.2. L'économétrie des séries chronologiques : Quelques concepts des base

3.2.1. Les concepts clés

Processus stochastiques, processus de stationnarité, processus purement aléatoires, processus non stationnaires, variables intégrées, modèles à marche aléatoire, cointégration tests de racine unitaire.

3.2.2. Les processus stochastiques

Processus stochastique ou aléatoire = ensemble de variables aléatoires ordonnées dans le temps.

Exemple : données trimestrielles relatives au PIB américain sur la période 1970 - 1991.

Si Y représente le PIB $\rightarrow Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_{86}, Y_{87}, Y_{88}$ où indice 1 correspond à la 1ère observation (PIB du 1er trimestre de 1970) et indice 88 à la dernière observation (PIB du 4ème trimestre de 1991).

PIB : un processus stochastique ?

Soit PIB = 2872 milliards \$ au 1er trimestre de 1971
Théoriqmt, il aurait pu prendre n'importe quelle valeur dépendant du climat pol. et éco. du moment.
Chiffre 2872 = réalisation particulière de toutes les possibilités.
→ PIB = processus stochastique et valeurs observées tel 1970 & 1991 sont une réalisat° particulière de ce processus.

Distinction lel processus stochastique et sa réalisation est voisine de celle lel population et échantillon de données en cross-section.

De m̂ qu'on utilise les données d'un échantillon pour tirer des ccl concernant une pop., on utilise des séries chronol. pour tirer des ccl. concernant un processus stochastique sous-jacent.

3.2.3. Les processus stochastiques stationnaires

Un processus stoch. est dit faiblmt stationnaire (ou stat. ds la covariance, ou stat. du 2nd ordre, ou stat. au sens large) si sa moyenne et sa variance sont constants dans le tmps et si la valeur de la covariance lel 2 périodes de tmps ne dépend que de la distance ou de l'écart lel ces deux périodes et non pas du moment auquel la covariance est calculée.

Un processus est rigoureusement stationnaire si tous les moments de sa distribution de probabilité (et pas slmt les 2 premiers moments) sont invariants dans le tmps.

Ds suite du cours, par séries stat., on sous-entend séries faiblmt stationnaires (car dans majorité des situations pratiques, ce type de stat. est suffisant pour faire des regress. avec des données temporelles).

Faible stationnarité ?

Soit Y_t une série temporelle avec les propriétés suivantes :

Moyenne : $E(Y_t) = \mu$
Variance : $var(Y_t) = E(Y_t - \mu)^2 = \sigma^2$
Covariance : $\gamma_k = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)]$

où γ_k = (auto) covariance au décallage k

si $k = 0 \longrightarrow \gamma_0$ = variance de Y $(= \sigma^2)$
si $k = 1 \longrightarrow \gamma_1$ = covariance lel 2 valeurs contiguës de Y

Imaginons qu'on déplace l'origine de Y_t à Y_{t+m} (p. ex. du 1er trimestre de 1970 au 1er trimestre de 1975 pour données // PIB américain).

Si Y_t (faiblmt) stationnaire : moyenne, variance et autocovariances de Y_{t+m} dvt être identiques à celles de Y_t. → elles sont identiques quel que soit le point où elles sont mesurées (elles ne varient pas ds le tmps).

Caractéristiques d'une série (fblmt) stat. : elle tend à retourner à sa moyenne (qu'on appelle la moyenne de retour) et les fluctuations autour de cette moyenne (mesurées par la variance) présentent une amplitude générlmt constante.

Série non stat. : moyenne et/ou variance variable(s) dans le tmps.

Pq une série chronol. doit-elle être stationnaire ?

Si pas stat., on ne pourra étudier son cmptmt que pour une période spécifique. Impossible de généraliser les résultats à d'ô périodes. Dans but prévisionnel, de telles séries ont une valeur très limitée.

Comment savoir si une série est stationnaire ?

Tests de stationnarité (cf. infra)

Analyse visuelle fournit svt informat° pertinente.

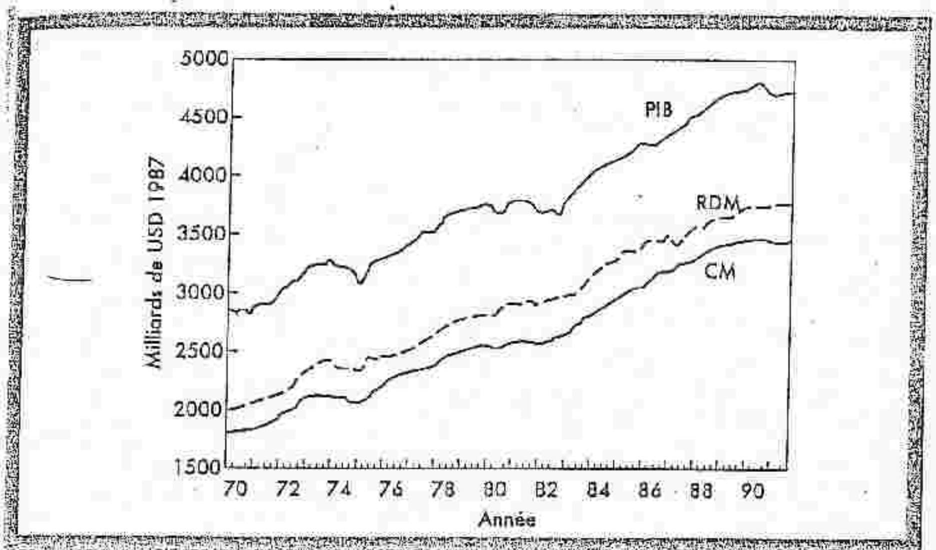


Figure 21.1 PIB, RDM et CM, Etats-Unis 1970-1991 (séries trimestrielles)

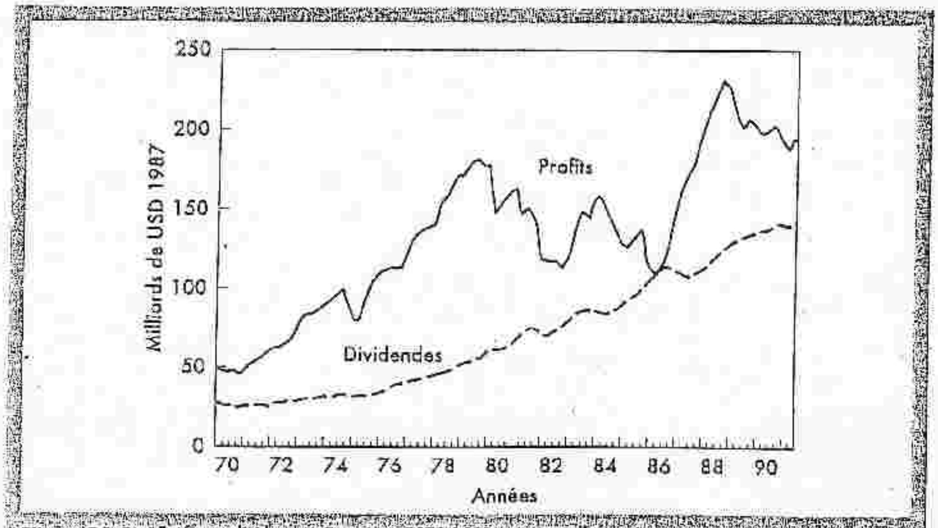


Figure 21.2 Profits et dividendes, Etats-Unis 1970-1991 (trimestriellement)

Processus purement aléatoire ou de bruit blanc ?

Processus stochastique est purement aléatoire si (s'il) :
- sa moyenne est nulle
- sa variance est constante
- n'est pas corrélé sériellement
  (càd. autocorrélation est nulle pour ⧺ retard)

Exemple de bruit blanc :
Terme d'erreur u_t ds modèle de rég. linéaire classique normale car $u_t \sim NID(0, \sigma^2)$

3.2.4. Les processus stochastiques non stationnaires

Exemple classique : modèle à marche aléatoire (MMA)

Terme marche aléatoire fait référence à la marche d'un ivrogne sortant d'un bar. Idée : lorsque ivrogne quitte un bar, il marche une distance $u * t$, où u est un terme aléatoire et t désigne le tmps. S'il continue sa marche indéfinimt, il pourrait s'éloigner de + en + du bar.

cf. tx de change, cours des actions.

Deux types de MMA :

i) La marche aléatoire sans tendance
(càd sans intercepte / terme constant)

ii) la marche aléatoire avec tendance
(càd avec intercepte / terme constant)

A. La marche aléatoire sans tendance

Soit u_t un terme d'erreur bruit blanc (avec moyenne = 0 et variance constante σ^2), alors Y_t est une marche aléatoire si :

$$\boxed{Y_t = Y_{t-1} + u_t} \quad (17.4.1)$$

Modèle AR(1) : régression de Y au tmps t sur sa valeur retardée d'une période.

cf. hyp. d'efficience des marchés : prix des actions sont avant tt aléatoires (pas de place pour la spéculat°).
Intuition : si ns pouvions prévoir le prix des actions de demain sur base de celui d'aujourd'hui, ns serions ts millionnaires.

A partir du modèle a marche aléatoire, on a que :

$$Y_1 = Y_0 + u_1$$
$$Y_2 = Y_1 + u_2 = Y_0 + u_1 + u_2$$
$$Y_3 = Y_2 + u_3 = Y_0 + u_1 + u_2 + u_3$$

Si processus débute à la période 0 avec Y_0 connue :

$$Y_t = Y_0 + \sum_{i=1}^{t} u_i \quad (17.4.2)$$

On peut montrer que :

$$\boxed{E(Y_t) = E\left(Y_0 + \sum_{i=1}^{t} u_i\right) = Y_0} \quad (17.4.3)$$

(pq ?)

$$\boxed{\text{var}(Y_t) = t.\sigma^2} \qquad (17.4.4)$$

(Pq ?)

$\Rightarrow$ Moyenne de Y = valeur initiale (cste).
Variance croît indéfiniment $\rightarrow$ pas conforme à une des hyp. de stat.

$\Rightarrow$ MMA sans tendance = processus stochastique non stationnaire.

<u>Caract. imp. des MMA</u> : « persistance des chocs aléatoires » (càd. des erreurs aléatoires)

Pq ? $\quad Y_t = Y_0 + \sum_{i=1}^{t} u_i$

L'effet d'un choc particulier ne s'éteint pas.
Exemple : si $u_2 = 2$ alors ts les Y_t à partir de Y_2 seront supérieurs de 2 unités et l'effet de ce choc ne s'effacera pas.
Une marche aléatoire a une mémoire infinie.

<u>Réécriture</u> :

$$\boxed{Y_t - Y_{t-1} = \Delta Y_t = u_t} \qquad (17.4.5)$$

où Δ = opérateur différence première.

Différence première de Y_t est stationnaire alors que Y_t ne l'est pas

$\Rightarrow$ Δ d'une série chronol. à marche aléatoire sont stationnaires.

3. La marche aléatoire avec tendance

Soit u_t un terme d'erreur bruit blanc (avec moyenne = 0 et variance constante σ^2), alors Y_t est une marche aléatoire avec tendance si :

$$\boxed{Y_t = \delta + Y_{t-1} + u_t} \qquad (17.4.6)$$

où δ est le paramètre de tendance.

On parle de tendance car en réécrivant le modèle, on voit que :

$$\boxed{Y_t - Y_{t-1} = \Delta Y_t = \delta + u_t} \qquad (17.4.7)$$

$\Rightarrow$ variable Y_t se déporte systématiqmt vers le haut ou vers le bas selon que la valeur de δ est positive ou négative (lorsque $t \uparrow$ d'1 unité).

En procédant comme pour MMA sans tendance, on peut montrer que :

$$\boxed{E(Y_t) = Y_0 + t.\delta} \qquad (17.4.8)$$

$$\boxed{var(Y_t) = t.\sigma^2} \qquad (17.4.9)$$

(Pq ?)

$\Rightarrow$ Moyenne et variance $\uparrow$ avec le tmps

$\Rightarrow$ MMA avec tendance = processus stochastique non stationnaire.

3.2.5. Les processus stochastiques à racine unitaire

Réécrivons MMA comme suit :

$$\boxed{Y_t = \rho Y_{t-1} + u_t} \qquad (17.5.1)$$

où $-1 \leq \rho \leq 1$

Si $\rho = 1$ → pblme de racine unitaire, càd. situation de non stationnarité. Pq ? Si $\rho = 1$, modèle équivaut à une marche aléatoire (sans tendance) → $var(Y_t) = t.\sigma^2$ $\neq$ cst → série chronol. non stat.

Rem : termes „non stat.", „marche aléat." et „racine unitaire" sont des synonymes.

Si $|\rho| < 1$ → série chrono. Y_t est (faiblmt) stationnaire. Pq ? Si dans (17.5.1) on suppose que : valeur initiale de Y (Y_0) = 0, $|\rho| < 1$, u_t un bruit blanc distribué de façon normale avec moyenne nulle et variance unitaire, on peut montrer que : $E(Y_t) = 0$ et $var(Y_t) = \frac{1}{(1-\rho^2)}$. Comme ces 2 termes sont des cstes, Y_t est une série chronol. stationnaire.

(Démonstrat° ?)

3.2.6. La stationnarité du trend (ST) et la stationnarité différentielle (SD) du processus stochastique

Le processus stochastique (la série) présente-il un trend (valeur moyenne de la série change-t-elle à long terme ?) et ce trend est-il déterministe ou stochastique ?

Trend déterministe ⟶ entièrement prévisible et non variable
Trend stochastique ⟶ imprévisible.

Soit le modèle suivant :

$$\boxed{Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t} \qquad (17.6.1)$$

où u_t est terme d'erreur bruit blanc
t est le tmps

- Plusieurs situations possibles :

1. $\beta_1 = 0,\ \beta_2 = 0,\ \beta_3 = 1$: $Y_t = Y_{t-1} + u_t$ (17.6.2)
   Modèle à marche aléatoire sans tendance
   non stationnaire (car $var(Y_t) = t.\sigma^2$)
   mais stationnaire en ≠ premières car
   $\Delta Y_t = u_t$ et $E(u_t) = 0$, $var(u_t) = \sigma^2$ (par hyp.

   ⟹ MMA sans tendance =
   „processus stationnaire différentiel" (SD)

2. $\underline{\beta_1 \neq 0,\ \beta_2 = 0,\ \beta_3 = 1}$: $Y_t = \beta_1 + Y_{t-1} + u_t$

Modèle à marche aléatoire (17.6.3)

avec tendance

non stationnaire (car $E(Y_t) = Y_0 + t.\beta_1$

et $\text{var}(Y_t) = t.\sigma^2$)

En ≠ premières : $\Delta Y_t = \beta_1 + u_t$ (17.6.4)

⇒ variable Y_t présente trend positif

si $\beta_1 > 0$ et négatif si $\beta_1 < 0$.

⇒ trend stochastique.

MMA avec tendance = „processus stationnaire différentiel" (SD)

Pq ?

Moyenne et variance de ΔY_t sont constantes

(car $E(\Delta Y_t) = \beta_1$

$$\begin{aligned} \text{var}(\Delta Y_t) &= E[\Delta Y_t - E(\Delta Y_t)]^2 \\ &= E[\beta_1 + u_t - \beta_1]^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

)

3. $\underline{\beta_1 \neq 0,\ \beta_2 \neq 0,\ \beta_3 = 0}$: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + u_t$

Modèle avec un trend déterministe (17.6.5)
non stationnaire

Pq ?

Variance cste : $var(Y_t) = E[Y_t - E(Y_t)]^2$
$$= E[\beta_1 + \beta_2 t + u_t - \beta_1 - \beta_2 t]^2$$
$$= E(u_t)^2 = \sigma^2$$

Moyenne $\neq$ cste : $E(Y_t) = \beta_1 + \beta_2 t$

Mais « processus de trend stationnaire » (ST)

Intuition : Une fois β_1 et β_2 connus (ou estimés), on peut calculer espérance mathématique (ou valeur moyenne) de Y_t. Si on soustrait de Y_t sa valeur moyenne pour chaque valeur de t, on obtient une série chronologique stationnaire.

Pq ?

$E(Y_t) = \beta_1 + \beta_2 t \Rightarrow Y_t - E(Y_t) = u_t$
et par hyp. $E(u_t) = 0$ et $var(u_t) = \sigma^2$.

4. $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$, $\beta_3 = 1$: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + Y_{t-1} + u_t$

Modèle à marche aléatoire avec tendance (càd. trend stochastique) et trend déterministe. → non stat. (17.6.6)

En ≠ premières : $\Delta Y_t = (Y_t - Y_{t-1}) = \beta_1 + \beta_2 t + u_t$
→ processus non stationnaire (17.6.7)

Cpdt, processus en ≠ premières (ΔY_t) est „trend stationnaire" (càd. stat. autour d'un trend déterministe)

Pq ?

$$E(\Delta Y_t) = \beta_1 + \beta_2 t$$
$$\begin{aligned} var(\Delta Y_t) &= E[\Delta Y_t - E(\Delta Y_t)]^2 \\ &= E[\beta_1 + \beta_2 t + u_t - \beta_1 - \beta_2 t]^2 \\ &= E[u_t]^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

⇒ si on soustrait de ΔY_t sa valeur moyenne pour chaque valeur de t, on obtient une série stationnaire.

5. $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$, $\beta_3 < 0$: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t$

Modèle avec un trend déterministe et une composante stationnaire AR(1) (17.6.8)

On peut montrer que Y_t est un processus de „trend stat." Si on soustrait de Y_t sa valeur moyenne pour chque valeur de t, on obtient une série stat.

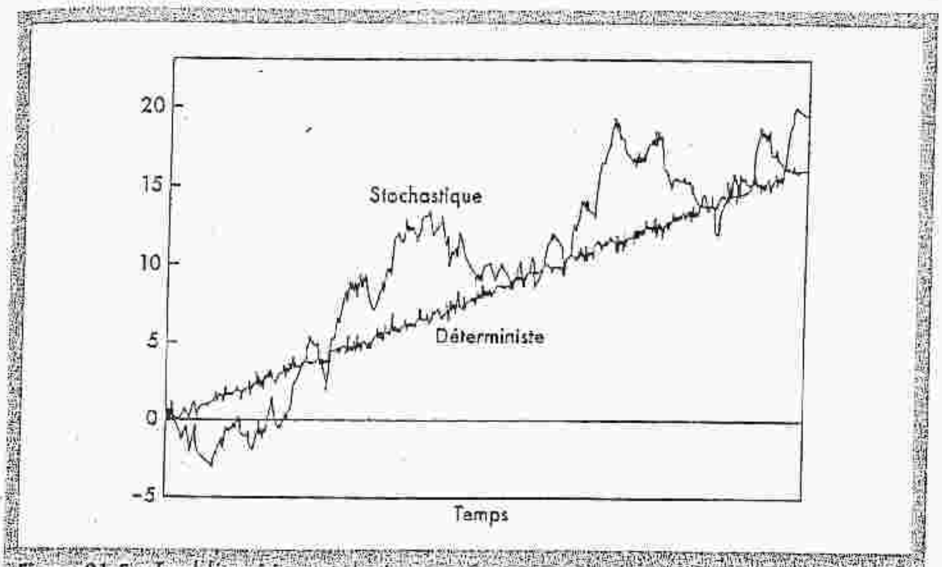


Figure 21.5 Trend déterministe et stochastique

- Série stochastique : générée par MMA avec tendance

$$\boxed{Y_t = 0,5 + Y_{t-1} + u_t}$$

où 500 valeurs de u_t ont été tirées de façon aléatoire à partir d'une distribution normale standard et où valeur initiale de Y vaut 1.

- Série déterministe : obtenue par modèle avec trend déterministe

$$\boxed{Y_t = 0,5.t + u_t}$$

où u_t créé de la m̃ manière que pour série stoch. et t = le tmps (mesuré chronologiqmt).

Observations :

> Trend déterministe : écarts // à la droite de trend (càd la moyenne non stat.) sont purement aléat. et disparaissent rapidmt, ils ne participent pas à l'évolut° à LT de la série (qui est entièrmt déterminée par composante du trend 0,5. t)

> Trend stochastique : composante aléatoire u_t influence cours de la série Y_t à moyen voire long terme.

3.2.7. Les processus stochastiques intégrés

Modèle à marche aléatoire = cas particulier d'une catégorie plus générale de processus stochastiques appelés processus intégrés.

Rappel : MMA (avec ou sans tendance) ne sont pas stationnaires mais leurs ≠ premières le sont.

Dès lors, MMA sont des modèles intégrés d'ordre 1, $I(1)$.

Si une série doit être différenciée 2 fois pour qu'elle devienne stationnaire, cette série temp. est intégrée d'ordre 2, $I(2)$.

De manière générale, si une série chronologique (non stationnaire) doit être différenciée "d" fois pour être rendue stationnaire, elle est intégrée d'ordre d, càd $Y_t \sim I(d)$.

Si une série chronol. Y_t est stationnaire (au départ, sans être différenciée), elle est intégrée d'ordre 0, càd $Y_t \sim I(0)$.

Rem :

- Série stationnaire ≡ série $I(0)$
- Plupart des séries temporelles sont $I(1)$. Ex : PIB, emploi, coût du travail, stock de K

Propriétés des séries intégrées !

Soit trois séries chronologiques X_t, Y_t et Z_t

a) Si $X_t \sim I(0)$ et $Y_t \sim I(1)$, alors
$Z_t = (X_t + Y_t) \sim I(1)$

Une combinaison linéaire ou la somme de séries temporelles stat. et non stat. est non stationnaire.

b) Si $X_t \sim I(d)$, alors $Z_t = (a + b.X_t) \sim I(d)$,
où a et b sont des constantes.

Une combinaison linéaire d'une série I(d) est aussi
$I(d) \Longrightarrow$ si $X_t \sim I(0)$, alors $Z_t = (a + b.X_t) \sim I($

c) Si $X_t \sim I(d_1)$ et $Y_t \sim I(d_2)$, alors
$Z_t = (a X_t + b Y_t) \sim I(d_2)$, où $d_1 < d_2$.

d) Si $X_t \sim I(d)$ et $Y_t \sim I(d)$, alors
$Z_t = (a X_t + b Y_t) \sim I(d^*)$, où d^* est
générlmt égal à d, mais dans certains
cas $d^* < d$ (cf. „cointégration").

$\Longrightarrow$ Prudence lorsqu'on combine 2 ou +ieurs séries temporelles qui sont intégrées avec des ordres $\neq$.

3.2.8. Le phénomène de la fausse régression

Soit 2 modèles à marche aléatoire :

$$Y_t = \beta_1 + Y_{t-1} + u_t \qquad (17.8.1)$$
$$X_t = \alpha_1 + X_{t-1} + v_t \qquad (17.8.2)$$

où on a créé 500 observations de u_t à partir d'une distribution $N(0,1)$ et 500 autres à partir d'une distribution $N(0,1)$.

β_1 et α_1 sont des constantes et valeurs initiales de X et Y sont nulles.

u_t et v_t ne sont pas sériellement ni mutuellmt corrélés.

Comme il s'agit de marches aléat. avec tendance, nous savons qu'elles :
- ne sont pas stationnaires
- sont intégrées d'ordre 1, $I(1)$
- présentent des trends stochastiques.

Supposons qu'on régresse Y_t sur X_t.

Comme par hypothèse Y_t et X_t ne sont pas des processus corrélés, le R^2 de la régression de Y sur X devrait être proche de zéro (il ne devrait y avoir aucune relat° ent les 2 variables).

Résultats de la régression :

Variable	Coefficient	Erreur standard	Statistique t
C	−13,2556	0,6203	−21,36856
X	0,3376	0,0443	7,61223

$R^2 = 0,1044$ $\qquad d = 0,0121$

Coeff. de rég. associé à X très sign. malgré que R^2 faible
⟶ suggère ∃ relation sign. lel Y et X, alors que par hyp. il n'y en a pas.

Ce phénomène est qualifié de „fausse régression", de „régression absurde" ou de „régression fallacieuse" („spurious regression"). Décrit pour la 1ère fois par Yule (1962).

Caractère absurde des résultats aurait pu être suspecté à partir de la très faible valeur de la stat. d de Durbin-Watson (qui suggère l'existence d'une forte auto-corrélation du premier ordre).

Selon Granger et Newbold (1974), lorsque $R^2 > d$, on peut suspecter que la régression est fausse.

Pour se convaincre du caractère absurde des résultats, régresser ΔY_t sur ΔX_t. On trouvera que R^2 pratiqmt nul et d de Durbin-Watson proche de 2.

3.2.9. Les tests de stationnarité

Deux questions :

1) Comment peut-on déterminer si une série chronol. est stationnaire ?

2) Si l'on découvre qu'une série est non stationnaire, comment peut-on la rendre stationnaire ?

A). L'analyse graphique

Il est tjs utile de représenter une série chronol. graph. et de l'analyser.

Permet d'avoir 1ère idée qt au caractère stationnaire d'une série.

B) La fonction d'autocorrélation (FAC) ou le corrélogramme

La FAC au décalage k (ρ_k) :

$$\boxed{\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}} \qquad (17.9.1)$$

$$= \frac{\text{covariance pour le retard } k}{\text{variance}}$$

où $\gamma_k = E[Y_t - E(Y_t)][Y_{t+k} - E(Y_{t+k})]$

$\gamma_0 = E[Y_t - E(Y_t)]^2$

$\rho_k \in [0, 1]$

Si on représente ρ_k pour $\neq$ valeurs de k, on obtient le „ corrélogramme de la population ".

En pratique, on ne dispose que d'une réalisation (ou d'un échantillon) d'un processus stochastique
$\Longrightarrow$ on ne peut calculer que la fct° d'auto-corrélation de l'échantillon (FACE) $\hat{\rho}_k$.

Nécessité de calculer :

$$\hat{\gamma}_k = \frac{\Sigma\,(Y_t - \bar{Y})\,(Y_{t+k} - \bar{Y})}{n} \equiv \text{covariance de l'échantillon pour décalage } k$$

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{\Sigma\,(Y_t - \bar{Y})^2}{n} \equiv \text{variance de l'échantillon}$$

où $\begin{cases} n = \text{taille de l'échantillon} \\ \bar{Y} = \text{moyenne de l'échantillon} \end{cases}$

FACE : $\hat{\rho}_k = \dfrac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}$

Représentation graphique des valeurs de $\hat{\rho}_k$ pour ≠ valeurs de k : „corrélogramme d'échantillon".

- <u>Comment „corrélogramme d'échantillon" permet-il de déterminer si série temporelle est stationnaire ?</u>

Comparons celui d'un :

- processus purement aléatoire (bruit blanc) :
  $Y_t = u_t$ où u_t = bruit blanc.
- processus de marche aléatoire
  $Y_t = Y_{t-1} + u_t$

i) Corrélogramme d'un processus purement aléatoire (bruit blanc)

Échantillon : 2 500
Observations retenues : 499

Autocorrélation	Corrélation partielle		AC	ACP	Stat Q	Prob
		1	−0,022	−0,022	0,2335	0,629
		2	−0,019	−0,020	0,4247	0,809
		3	−0,009	−0,010	0,4640	0,927
		4	−0,031	−0,031	0,9372	0,919
		5	−0,070	−0,072	3,4186	0,636
		6	−0,008	−0,013	3,4493	0,751
		7	0,048	0,045	4,6411	0,704
		8	−0,069	−0,070	7,0385	0,532
		9	0,022	0,017	7,2956	0,606
		10	−0,004	−0,011	7,3059	0,696
		11	0,024	0,025	7,6102	0,748
		12	0,024	0,027	7,8993	0,793
		13	0,026	0,021	8,2502	0,827
		14	−0,047	−0,046	9,3726	0,806
		15	−0,037	−0,030	10,074	0,815
		16	−0,026	−0,031	10,429	0,843
		17	−0,029	−0,024	10,865	0,863
		18	−0,043	−0,050	11,807	0,857
		19	0,038	0,028	12,575	0,860
		20	0,099	0,093	17,739	0,605
		21	0,001	0,007	17,739	0,665
		22	0,065	0,060	19,923	0,588
		23	0,053	0,055	21,404	0,556
		24	−0,017	−0,004	21,553	0,606
		25	−0,024	−0,005	21,850	0,644
		26	−0,008	−0,008	21,885	0,695
		27	−0,036	−0,027	22,587	0,707
		28	0,053	0,072	24,068	0,678
		29	−0,004	−0,011	24,077	0,725
		30	−0,026	−0,025	24,445	0,752

Figure 21.6
Corrélogramme d'un terme d'erreur de type bruit blanc u. AC = autocorrélation, ACP = autocorrélation partielle (chapitre 22), Stat. Q = statistique Q, Prob = probabilité.

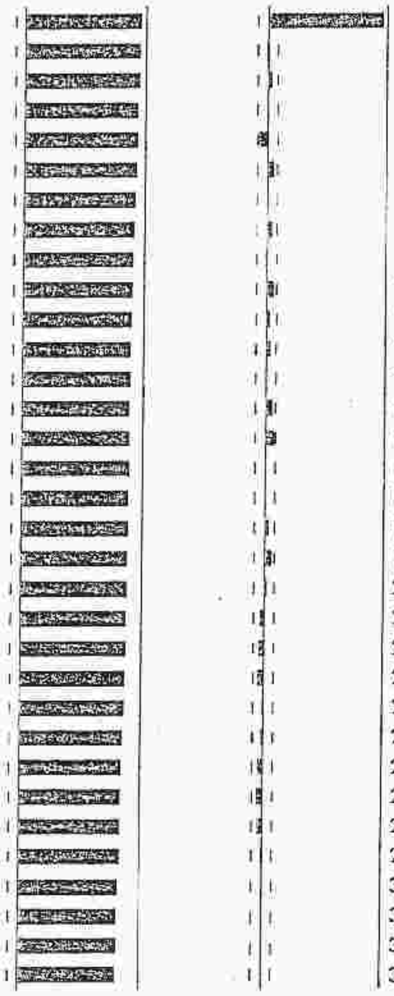
Création d'un échantillon de 500 termes d'erreur (u) à partir d'une distribution normale standard.

Corrélogramme établit jusqu'à 30 retards.

Autocorrélations pour ≠ décalages oscillent autour de zéro.
Diagramme illustre le corrélogramme d'une série chronolog. stationnaire.

ii) Corrélogramme d'une série à marche aléatoire où $Y_t = Y_{t-1} + u_t$

Échantillon : 2 500
Observations retenues : 499



	AC	ACP	Stat Q	Prob
1	0,992	0,992	493,86	0,000
2	0,984	0,000	980,68	0,000
3	0,976	0,030	1461,1	0,000
4	0,969	0,005	1935,1	0,000
5	0,961	−0,059	2402,0	0,000
6	0,953	0,050	2862,7	0,000
7	0,946	0,004	3317,3	0,000
8	0,939	0,040	3766,4	0,000
9	0,932	−0,009	4210,1	0,000
10	0,927	0,055	4649,1	0,000
11	0,921	0,018	5083,9	0,000
12	0,916	0,039	5514,9	0,000
13	0,912	0,002	5942,4	0,000
14	0,908	0,056	6367,0	0,000
15	0,905	0,061	6789,8	0,000
16	0,902	0,000	7210,6	0,000
17	0,899	0,006	7629,4	0,000
18	0,896	0,030	8046,7	0,000
19	0,894	0,053	8463,1	0,000
20	0,892	0,013	8878,7	0,000
21	0,890	−0,041	9292,6	0,000
22	0,886	−0,040	9704,1	0,000
23	0,882	−0,044	10113,	0,000
24	0,878	−0,012	10518,	0,000
25	0,873	−0,023	10920,	0,000
26	0,867	−0,041	11317,	0,000
27	0,860	−0,055	11709,	0,000
28	0,853	−0,045	12095,	0,000
29	0,846	−0,010	12476,	0,000
30	0,839	0,008	12851,	0,000
31	0,832	−0,006	13221,	0,000
32	0,825	0,003	13586,	0,000
33	0,819	−0,006	13946,	0,000

Figure 21.7
Corrélogramme d'une série temporelle à marche aléatoire. Pour les définitions, voir la figure 21.6

- Autocorrélation pour divers décalages sont très élevés et ce m̂ pour les décalages supérieurs à 33 trimestres.

Corrélogramme typique d'une série non stationnaire : coeff. d'autocorrélat° part d'une valeur très élevée et diminue très progressivmt vers zéro lorsque l'écart ↗.

iii) Corrélogramme du PIB américain pour lequel on dispose de données trimestrielles entre 1970 & 1991 (jusqu'à 25 retards)

Corrélogramme similaire à celui d'un processus à marche aléatoire (autocorr. part de valeur imp et ↓ dcmt)

Échantillon : 1970–1 1991–4
Observations retenues : 88

Autocorrélation	Corrélation partielle		AC	ACP	Stat Q	Prob
		1	0,969	0,969	85,462	0,000
		2	0,935	−0,058	166,02	0,000
		3	0,901	−0,020	241,72	0,000
		4	0,866	−0,045	312,39	0,000
		5	0,830	−0,024	378,10	0,000
		6	0,791	−0,062	438,57	0,000
		7	0,752	−0,029	493,85	0,000
		8	0,713	−0,024	544,11	0,000
		9	0,675	0,009	589,77	0,000
		10	0,638	−0,010	631,12	0,000
		11	0,601	−0,020	668,33	0,000
		12	0,565	−0,012	701,65	0,000
		13	0,532	0,020	731,56	0,000
		14	0,500	−0,012	758,29	0,000
		15	0,468	−0,021	782,02	0,000
		16	0,437	−0,001	803,03	0,000
		17	0,405	−0,041	821,35	0,000
		18	0,375	−0,005	837,24	0,000
		19	0,344	−0,038	850,79	0,000
		20	0,313	−0,017	862,17	0,000
		21	0,279	−0,066	871,39	0,000
		22	0,246	−0,019	878,65	0,000
		23	0,214	−0,008	884,22	0,000
		24	0,182	−0,018	888,31	0,000
		25	0,153	0,017	891,25	0,000

Figure 21.8 Corrélogramme du PIB américain, 1970-I à 1991-IV. Voir la figure 21.6 pour les définitions

Comment choisir longueur du décalage pour calculer FAC ?

Pas de réponse univoque.
En pratique, on calcule générlmt FAC jusqu'au tiers ou au quart de la longueur de la série chronlgique. Exemple : PIB américain → 88 observations → entre 22 & 29 trimestres de décalage.

c) La signification statistique des coeff. d'autocorrélation

Signification statistique d'un coeff. d'autocorrélat° $\hat{\rho}_k$ peut être déterminée à partir de son erreur standard.

Bartlett (1946) : si une série temp. est pftmt aléatoire (càd. si elle présente un bruit blanc → moyenne = 0, variance = cst, autocorrélat° = 0) alors :

$$\boxed{\hat{\rho}_k \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)} \qquad \text{(asympt.)}$$

$\Rightarrow$ variable centrée réduite $Z = \dfrac{\hat{\rho}_k - 0}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \boxed{\dfrac{\hat{\rho}_k}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \sim N(0,1)}$

Cette statistique de test peut être calculée pour une série chronol. donnée.

Règle de décision : si stat. de test calculée est supérieure en valeur absolue à la valeur critique de la distrib. normale standard (pour valeur déterminée de α), on rejette hyp. nulle (selon laquelle coeff. d'autocorr. = 0) sinon on ne la rejette pas.

Application au PIB américain : tester significativité du coeff. d'autocorrél. pour décalage égal à 10.

$n = 88$, $\hat{\rho}_{10} = 0{,}638 \Rightarrow Z = \hat{\rho}_k / \sqrt{n} = \dfrac{0{,}638}{0{,}1066} = 5{,}98$

Valeur critique de la distribut normale standard à 5% = 1,96

$\Rightarrow$ valeur stat test calculée > valeur critique $\Leftrightarrow RH_0$

-2 1. 14-

- Tester hyp. jointe que tous les coeff. d'autocorr. jusqu'à k retards (ρ_k) sont simultnmt égaux à zéro
  → utiliser la <u>statistique Q de Box et Pierce (1970)</u>.

$$\boxed{Q = n . \sum_{k=1}^{m} \hat{\rho}_k^2}$$

où n = taille de l'échantillon
  m = longueur du retard

Svt utilisée pour tester si une série chrono. est un bruit blanc. Dans gds échant., stat. Q suit approxim. dist. de χ^2 avec m degrés de liberté.

<u>Règle de décision :</u> si Q calculée > valeur critique χ^2 pour α choisi ⟹ RH_0 selon laquelle ts les (vrais) coeff. d'autocorrél. (ρ_k) sont simultanémt nuls.

- Alternative : <u>statistique LB de Ljung - Box (1978)</u>

$$\boxed{LB = n\,(n+2) \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\rho_k}{n-k} \right) \sim \chi^2(m)}$$

- Dans petits échantillons, statistique LB présente des propriétés supérieures (càd. une puissance accrue au sens statistique) à la statistique Q.

3.2.10. Le test de racine unitaire

Soit l'expression :

$$\boxed{Y_t = \rho Y_{t-1} + u_t} \qquad -1 \leq \rho \leq 1 \qquad (17.10.1)$$

où u_t est un terme d'erreur de type bruit blanc.

Si $\rho = 1$ (càd s'il y a une racine unitaire), expression devient un modèle à marche aléatoire sans tendance qui est un processus stochastique non stationnaire.

$\Rightarrow$ pour tester si une série chrono. est stat., il suffit de regresser Y_t sur Y_{t-1} et de tester si valeur estimée de ρ est stat. égal à 1.

Si on rejette hyp. que $\rho = 1$, la série Y_t est déclarée stationnaire (et inversement). $\equiv$ idée générale des tests de racine unitaire.

En pratique, soustraire Y_{t-1} des 2 termes de (17.10.1) :

$$Y_t - Y_{t-1} = \rho Y_{t-1} - Y_{t-1} + u_t$$

$$= (\rho - 1) Y_{t-1} + u_t \qquad (17.10.2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + u_t} \qquad (17.10.3)$$

où $\delta = (\rho - 1)$

Δ = opérateur différence première.

On teste si $\delta = 0$ (plutôt que si $\rho = 1$)

Si on ne peut rejeter que $\delta = 0$ $\rightarrow$ on ne peut rejeter que $\rho = 1$ $\rightarrow$ il y a une racine unitaire, la série temp. est non stationnaire.

Remarque: si $\delta = 0$, on trouve que :

$$\Delta Y_t = 0 . Y_{t-1} + u_t$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = u_t} \qquad (17.10.4)$$

Différences premières d'une série chron. à marche aléatoire sont stationnaire (car par hyp. u_t est bruit blanc).

En pratique: on régresse ΔY_t sur Y_{t-1} et on vérifie si coeff. de pente estimé $\hat{\delta}$ est sign. $\neq$ de zéro.

Si δ pas significativmt $\neq$ de zéro $\rightarrow$ Y_t est non stat.

Si $\delta < 0$ $\rightarrow$ Y_t est stationnaire.

(Pq $\delta < 0$: pour qu'il y ait stat, il faut que $\rho < 1$ (car si $\rho > 1$, la série temp. est explosive); comme $\rho = (\delta + 1)$, pour qu'il y ait stat, il faut que $\delta < 0$)

Quel test utiliser pour vérifier si δ est signif. $\neq 0$ (et négatif) ?

A priori, la statistique t habituelle :

$$t = \frac{\hat{\delta} - \delta_0}{es(\hat{\delta})} \quad \text{où } \delta_0 = \text{valeur de } \delta \text{ sous } H_0$$

$$\Rightarrow \quad t = \hat{\delta}/es(\hat{\delta})$$

Cpdt, Dickey et Fuller (1979) ont montré que sous H_0 selon laquelle $\delta = 0$, la statistique de test t ne suit plus une distribut° de Student (m̂ ds gds échant., elle n'a donc pas une distrib. asympt. normale) mais elle suit une distribut° de "tau" (dont les valeurs critiques sont supérieures à celles de la distribut° de Student).

Statistique de test tau connue sous le nom de test de Dickey - Fuller (DF).

Valeurs critiques de cette statistique tau, calculées par Dickey - Fuller et MacKinnon, incorporées ds plupart des logiciels écon.

Exécution du test du DF implique +ieurs décisions : marche aléatoire peut prendre +ieurs formes (avec ou sans tendance, avec ou sans trend déterministe)

- Test de DF peut être estimé sous les trois formes suivantes :

1) Y_t est une marche aléatoire :

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + u_t \qquad (17.10.1)$$

2) Y_t est une marche aléatoire avec tendance :

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \delta Y_{t-1} + u_t \qquad (17.10.2)$$

3) Y_t est une marche aléatoire avec tendance et trend déterministe :

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta Y_{t-1} + u_t \qquad (17.10.3)$$

où t = le temps / le trend déterministe.

On teste tjs $H_0 : \delta = 0$ (càd. s'il existe une racine unitaire).
Hypothèse alternative : $\delta < 0$ (car on écarte possibilité que $\delta > 0$ car ds ce cas $\rho > 1$ → série temp. explosive)

Si RH_0 → $\delta < 0$, ce qui signifie que Y_t est série chrono :

i) Stationnaire avec une moyenne nulle si marche aléatoire.

ii) Stationnaire avec une moyenne non nulle $(= \beta_1/(1-\rho))$ si marche aléatoire avec tendance.

iii) Stationnaire autour d'un trend déterministe si marche aléatoire avec tendance et trend déterministe.

Attention :

a) Valeurs critiques de la stat. „tau" sont ≠ pour les 3 spécifications du test de DF.

b) Ne pas se tromper ds spécification du test de DF. A priori, difficile de savoir quelle spécification est adéquate → tester les ≠ spécifications du test de DF et analyser les résultats dans leur ensemble.

Exemple : PIB américain (e) 1970 & 1991

Résultats des 3 spécifications du test de DF :

$$\left[\begin{array}{l} \widehat{\Delta PIB_t} = 0,00576 \; PIB_{t-1} \quad \equiv \text{marche aléatoire} \\ \quad t = (5,7980) \\ R^2 = -0,0152 \\ d = 1,34 \end{array}\right. \qquad (1)$$

$$\left[\begin{array}{l} \widehat{\Delta PIB_t} = 28,2054 - 0,00136 \; PIB_{t-1} \quad \equiv \text{marche aléat. avec tendance} \\ \quad t = (1,1576) \qquad (-0,2191) \\ R^2 = 0,00056 \\ d = 1,35 \end{array}\right. \qquad (2)$$

$$\left[\begin{array}{l} \widehat{\Delta PIB_t} = 190,3857 + 1,4776\, t - 0,0603 \; PIB_{t-1} \quad \equiv \text{marche aléat avec tendance et trend déterm.} \\ \quad t = (1,8389) \qquad (1,6109) \qquad (-1,6252) \\ R^2 = 0,0305 \\ d = 1,31 \end{array}\right. \qquad (3)$$

(1) : $\hat{\delta} > 0 \longrightarrow \hat{\rho} > 1$ (car $\delta = \rho - 1$) : série explosive

(2) et (3) : $\hat{\delta} < 0 \longrightarrow \hat{\rho} < 1$ (car $\delta = (\rho - 1)$)

$$\begin{cases} \hat{\rho} = 0{,}9986 & \text{ds modèle (2)} \\ \hat{\rho} = 0{,}9397 & \text{ds modèle (3)} \end{cases} \quad (\rho = \delta + 1)$$

- On ne peut pas rejeter H_0 que $\delta = 0$ (ou $\rho = 1$) :
  - ds modèle (2), $t = -0{,}2191$ < valeur critique à 10% qui vaut $-2{,}5842$
  - ds modèle (3), $t = -1{,}6252$ < valeur critique à 10% qui vaut $-3{,}1567$

- Conclusion :

On peut conclure sur base de l'analyse graphique, du corrélogramme et du test de Dickey-Fuller, que le PIB américain n'était pas stationnaire sur la période 1970 - 1991.

A) Le test de Dickey-Fuller augmenté (DFA)

Si terme d'erreur autocorrélé $\longrightarrow$ DFA.

Consiste simplmt à „augmenter" les 3 équations de DF en y ajoutant des valeurs décalées de la variable dépendante ΔY_t.

Exemple : modèle à marche aléatoire avec tendance et trend déterministe

$$DFA \equiv \boxed{\Delta Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta Y_{t-1} + \alpha_i \sum_{i=1}^{m} \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t}$$

où ε_t terme d'erreur bruit blanc et $\Delta Y_{t-1} = (Y_{t-1} - Y_{t-2})$, $\Delta Y_{t-2} = Y_{t-2} - Y_{t-3}$, etc...

- Nbre de lags à inclure ? Question empirique. Rajouter termes décalés jusqu'au moment où il n'y a plus d'autocorrélation.

- Objectif de DFA ? Tester si $\delta = 0$. Comme stat de test de DFA $\left[\tau = \dfrac{\hat{\delta} - \delta_0}{es(\hat{\delta})} \right]$ suit m̂ distributᵒ asympt. que stat de DF ; les valeurs critiques sont identiques.

- Application de DFA au PIB américain :

$$\widehat{\Delta PIB_t} = \underset{(2,38)}{234,97} + \underset{(2,15)}{1,89\, t} - \underset{(-2,22)}{0,08\, PIB_{t-1}} + \underset{(3,46)}{0,36\, \Delta PIB_{t-1}}$$

$R^2 = 0,15$
$d = 2,09$

$\hat{\delta} = -0,08 \quad (<0)$

Rejette pas H_0 selon laquelle $\delta = 0$
car $t = -2,22 <$ valeur critique à 10% $(-3,16)$

Même après prise en cpte de l'autocorrélation, ccl = PIB américain est non stationnaire.

- ∃ autres tests de racine unitaire

Exemple : test de Phillips - Perron (1988) → méthodes non paramétriques pour prendre en cpte autocorrélatᵒ du terme d'erreur sans ajouter des termes de différence décalés de la variable dpdte.

Pq existe-t-il tant de tests de racine unitaire ?

La plupart des tests de racine unitaire ont une faible puissance.

Puissance d'un test = prob. rejeter H_0 lorsqu'elle est fausse

⟶ puissance d'un test = 1 − risque seconde espèce β

β = prob. accepter H_0 alors qu'elle est fausse

α = prob rejeter H_0 alors qu'elle est vraie.

Tests de racine unitaire ne rejettent pas assez sur H_0 selon laquelle une série est non stationnaire.

Raisons :

1) Puissance d'un test dépend davantage de l'étendue de la période que de la taille de l'échantillon.

2) si ρ légèrmt inférieur à 1, test de racine unitaire pourrait conduire à ne pas RH_0.

3) tests de racine unitaires présentés supposent l'existence d'une seule racine unitaire (càd que la série est $I(1)$) Il faut utiliser des tests de stat. alternatifs (p.ex. test de Dickey-Pantula (1987)) si plusieurs racines unitaires (p.ex. pour séries $I(2)$).

4) Tests de racine unitaire ne prennent pas en cpte les chgmts structurels (cf. chap. relatif aux variables dummy) dont pourrait faire l'objet une série temp.

3.2.11. La transformation des séries temporelles non stationnaires

Pour éviter le pblme de la fausse régression („spurious regression") qui peut se produire lorsqu'on régresse une série temp. non stat sur une ou plusieurs ô séries temp. non stat, il faut transformer les séries non stat afin de les rendre stat.

Méthode de transformation dépend de si séries temp sont:

i) stationnaires en différences premières
(SDP ou „difference stationary")

<u>ou</u>

ii) stationnaires par rapport au trend
(SD ou „trend stationary")

A) Les processus stationnaires en différences premières

Si une série temp. est $I(1)$, il suffit de prendre les ≠ premières pour la rendre stationnaire.

De manière générale, si une série temp est $I(d)$, où d est un nbre entier, elle doit être différenciée d fois pour être rendue stationnaire.

Exemple : PIB américain qui est $I(1)$

$\Delta PIB_t = PIB_t - PIB_{t-1}$

Soit $D_t = \Delta PIB_t$, considérons régr. suivante :

$$\widehat{\Delta D_t} = 16,0049 + 0,06827\ D_{t-1}$$
$$t = (3,6402) \quad (-6,6303)$$

$R^2 = 0,3435$

$d = 2,0344$

Valeur critique de stat tau à 1% = -3,5073.

Valeur statistique $\tau (= t)$ calculée (= - 6,6303) + négative que valeur critique $\longrightarrow$ RHo que $\delta = 0$ (on rejette Ho selon laquelle PIB en ≠ premières est non stat.

$\longrightarrow \Delta PIB \sim I(0)$.

B) Les processus stationnaires par rapport au trend

Pour rendre une série stat. autour d'un trend réellmt stat., il faut la régresser sur le tmps. Résidus de cette régression seront stationnaires.

Explication :

$$\boxed{Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + u_t}$$

où Y_t = série stat. autour d'un trend t (le tmps)

$$\Rightarrow \boxed{\hat{u}_t = (Y_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 t)}$$

Ces résidus sont stationnaires : „ série temp. dépourvue de trend linéaire ".

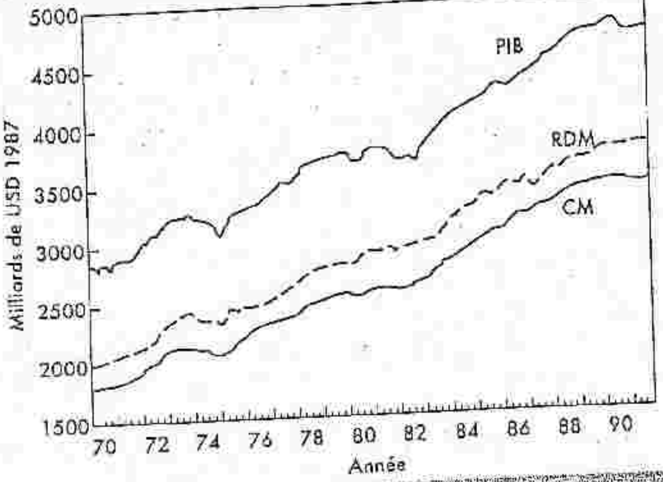


Figure 21.1 *PIB, RDM et CM, Etats-Unis 1970-1991 (séries trimestrielles)*

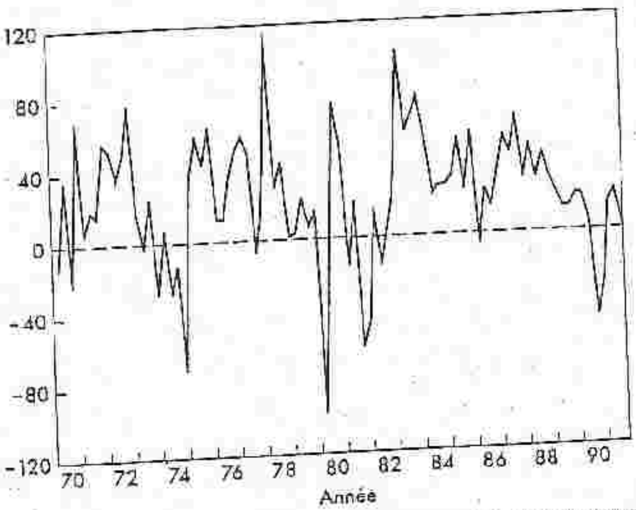


Figure 21.9
Différences premières du PIB américain, 1970-1991 (par trimestre)

- Trend peut ne pas être linéaire :

$$\boxed{Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2 + u_t} \qquad \text{(trend quadratique)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{u}_t = (Y_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 t - \hat{\beta}_3 t^2)}$$: „ série temp. dépourvues de trend quadratique "

- <u>Remarques</u> :

Si une série chronol. est stat. en ≠ premières (SDP) et qu'on la traite comme une série stat. autour d'un trend (ST) ⟶ série est „ <u>sous-différenciée</u> ".

Si une série chronol. est stat. autour d'un trend et qu'on la traite comme une série stat. en ≠ premières ⟶ série est „ <u>sur-différenciée</u> ".

Les séries temp. macro-éco. sont ultmt + svt stationnaires en ≠ premières (SDP) que stat. autour d'un trend (ST).

3.2.12. La cointégration : la régression d'une série temporelle à racine unitaire sur une autre série temp. à racine unitaire

Si l'on régresse série temp. non stat sur série temp. non stat. cela peut aboutir à une rég. fausse ou absurde.

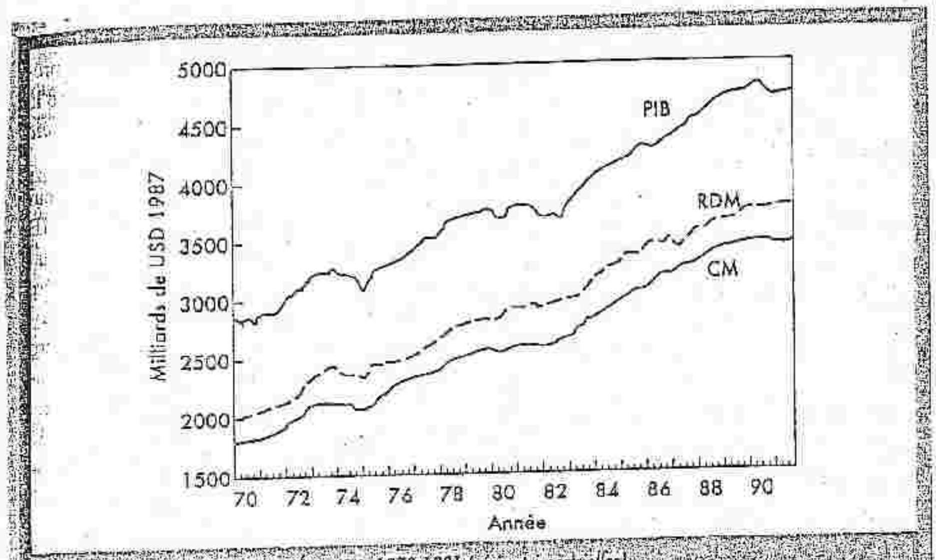


Figure 21.1 PIB, RDM et CM, États-Unis 1970-1991 (séries trimestrielles).

Relation lel consommation des ménages (CM) et leur revenu disponible (RDM)?

CM et RDM $\sim I(1)$

$$CM_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 RDM_t + \hat{u}_t$$

$$\hat{u}_t = CM_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 RDM_t$$

Supposons qu'en soumettant résidus $\hat{u}_t$ à un test de racine unitaire, on conclut qu'il faut RHo que terme d'erreur est non stat. → terme d'erreur stat., $I(0)$.

⇒ Combinaison linéaire de 2 séries temp non stat $I(1)$ est stationnaire, càd. $I(0)$.

Situation où combinaison linéaire annulle les trends stochastiques des 2 séries.

CM et RDM sont $I(1)$ mais leur épargne (càd leur revenu moins leur consommation) est $I(0)$.

→ il est pertinent de régresser CM sur RDM car terme d'erreur (l'épargne) est stationnaire
→ régression ni fausse, ni absurde (no „spurious reg").

Lorsque la combinaison linéaire de 2 variables $I(1)$ est stationnaire, on dit que ces 2 variables sont „ cointégrées ".

D'un point de vue économique, 2 variables seront cointégrées si elles se caractérisent par une relation de long terme (ou d'équilibre).

Exemple

Théorie quantitative de la monnaie de Fisher met en évidence qu'à long terme : $M \times V = P \times Q$.
(produit de la masse monétaire et de la vitesse de circulat° de la monnaie = valeur de l'ensemble des transactions)

En résumé

Si résidus d'une rég. impliquant des séries $I(1)$ sont stat, on peut faire de l'inférence stat. de manière conventionnelle en utilisant les tests habituels (test en t, F test, etc.)

• Dans langage de la théorie relative à la cointégration :

$$CM_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \, RDM_t + \hat{u}_t$$

≡ „régression de cointégration" et paramètre de pente β_2 ≡ „paramètre de cointégration".

A) Tester la cointegration

Test d'Engle - Granger (EG) et d'Engle - Granger augmenté (EGA).

Consiste à estimer la relation tel les variables susceptibles d'ê cointégrées (p. ex. $CM_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 RDM_t + \hat{u}_t$), de sauver les résidus et de vérifier s'ils sont stationnaires à l'aide du test de Dickey - Fuller (DF) ou Dickey - Fuller augmenté (DFA).

Attention : les tests de DF et DFA sont appliqués à des valeurs estimées (les résidus) → les valeurs critiques de Dickey - Fuller et MacKinnon ne sont plus appropriées → il faut se référer aux valeurs critiques d'Engle - Granger (reprises ds +part des logiciels écon.)

Illustration :

$$\left[\begin{array}{l} \widehat{CM}_t = -171,4412 + 0,9672 \; RDM_t \\ \quad t = (-7,4808) \qquad\qquad (119,8712) \\ R^2 = 0,9940 \\ d = 0,5316 \end{array}\right.$$

CM et RDM sont $I(1)$ → rég. fallacieuse !

Test de racine unitaire sur les résidus :

$$\left[\begin{array}{l} \Delta \hat{u}_t = -0,2753 \; u_{t-1} \\ \quad t = (-3,7791) \\ R^2 = 0,1422 \\ d = 2,2775 \end{array}\right.$$

Valeur critique (selon tables d'Engle-Granger) de la statistique τ $(=t)$ à 1% $= -2,5899$.

Comme stat de test calculée est bien + négative $(-3,7791)$, RH_0 selon laquelle les résidus sont non stat. → résidus de la reg. de CM sur RDM sont $I(0)$

On appelle la relation lel CM et RDM la „fonction de consommation statique" ou „de long terme".

Interprétation des paramètres de la rég. de cointégr. ds une optique de long terme → coeff rég. // RDM $(= 0,9672)$ ≡ propension marg à cons (PmC) de LT ou

B) La cointégration et le mécanisme de correction d'erreur (MCE)

Les variables CM et RDM sont cointégrées $\rightarrow \exists$ une relation de „ long terme " ou d' „ équilibre " lel ces 2 variables.

A court terme, il peut y avoir un déséquilibre.
Il est mesuré par le terme d'erreur u_t de la régression de cointégration où $u_t = CM_t - \beta_1 - \beta_2 RDM_t$.

Terme d'erreur $u_t \equiv$ „ erreur d'équilibre" $\rightarrow$ mesure l'écart lel la valeur de CM à court terme et à long terme $\rightarrow$ u_t permet de relier le cmpt de court terme de CM à sa valeur de long terme.

A long terme (à l'équilibre), $u_t = 0$

$\Rightarrow$

Si $u_t > 0$: valeur de CM > à sa valeur d'éq. (de LT).
Si $u_t < 0$: valeur de CM < à sa valeur d'éq. (de LT).

Mécanisme à correction d'erreur (MCE), développé par Sargan (1984) et diffusé par Engle et Granger, permet de corriger ce déséquilibre.

D'après „ théorème de représentation de Granger", si deux variables X et Y sont cointégrées, la relation lel ces 2 variables X et Y peut être représentée par un modèle à correction d'erreur (MCE).

Illustration :

Exemple // à la CM et au RDM.

$$\boxed{\Delta CM_t = \alpha_0 + \alpha_1 \ \Delta RDM_t + \alpha_2 \ u_{t-1} + \varepsilon_t}$$

où Δ : l'opérateur ≠ première

ε_t : terme d'erreur aléatoire

$u_{t-1} = (CM_{t-1} - \beta_1 - \beta_2 \, RDM_{t-1})$ càd valeur retardée d'une période du terme d'erreur de la régr. de cointegration.

⇒ Équation „type" d'un MCE

ΔCM dépend de ΔRDM et du terme d'erreur d'éq. (u_{t-1})

Si terme d'erreur $u_{t-1} \neq 0$ ⟶ modèle n'est pas à l'éq.

Si $\Delta RDM = 0$ et $u_{t-1} > 0$ ⟶ valeur de CM_{t-1} > à sa valeur d'éq. (qui est égale à $\beta_1 + \beta_2 \, RDM_{t-1}$).

On s'attend à ce que $\alpha_2 < 0$

Pq ?

Lorsque $u_{t-1} > 0$ et $\alpha_2 < 0$ ⟶ $\alpha_2 \cdot u_{t-1} < 0$
⟶ $\Delta CM_t < 0$.

Lorsque $\alpha_2 < 0$, le déséquilibre se résorbe progressivmt. Autrement dit, valeur de CM qui (initialmt) est supérieure à sa valeur d'équilibre (car $u_{t-1} > 0$) diminue et converge progressivmt vers sa valeur de long terme.

De même, si $\alpha_2 < 0$ et $u_{t-1} < 0 \rightarrow \alpha_2 \cdot u_{t-1} > 0$
$\rightarrow \Delta CM_t > 0$

Lorsque $\alpha_2 < 0$, déséquilibre se résorbe progressivmt.
Autrement dit, valeur de CM qui (initialmt) est inférieure à sa valeur d'équilibre (car $u_{t-1} < 0$) augmente et converge vers sa valeur de long terme.

Résultats :

$$\widehat{\Delta CM_t} = 11,6918 + 0,2906 \; \Delta RDM_t - 0,0867 \; \hat{u}_{t-1}$$
$$t = (5,3249) \qquad (4,1717) \qquad (-1,6003)$$

$R^2 = 0,1717$
$d = 1,9233$

Terme d'erreur d'équilibre pas stat $\neq$ de zéro $\rightarrow$ suggère que CM s'ajuste uniq. aux variations du RDM à la $\hat{m}$ période.

Variations à court terme du RDM ont un effet positif et significatif sur les variations à court terme de CM.

$\hat{\alpha}_1 = 0,2906$ peut être interprété comme la propension marginale à consommer (PmC) de court terme.

La PmC de long terme est fournie par la régression de cointégration (càd la relation d'éq.) : $\hat{\beta}_2 = 0,9672$.